# LIMITI NOTEVOLI

- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad (a>0)$
- $\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$
- $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0^+} x \log x = 0$

# DERIVATE DIREZIONALI

$$D_{\vec{v}} f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{v}$$

Esempio: Calcolare la derivata direzionale di $f(x,y) = x^2 \sin y$ nel punto $P=(1,1)$ e nella direzione $\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

1° PASSO: Calcolo DERIVATE PARZIALI

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \sin y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \cos y$$

2° PASSO  APPLICO FORMULA

$$D_{\vec{v}} f(1,1) = \nabla f(1,1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= \left(2\sin(1), \cos(1)\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \dots$$

## MAX E MIN ASSOLUTI

1° PASSO  Verifico se l'insieme di definizione è CHIUSO e LIMITATO

(CHIUSO : contiene i punti del bordo
LIMITATO : può essere sempre racchiuso in un palla)

2° PASSO  pongo $\nabla f(x,y) = 0$ e trovo i punti in cui si annulla.

ottengo un punto critico (verifico che è in D).

3° PASSO  Studio $f$ sul bordo, parametrizzo.

4° PASSO  sostituisco i valori ottenuti.

TEOREMA DI WEIERSTRASS

$f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, se $\Omega$ è CHIUSO e LIMITATO ed $f$ è continua su $\Omega$

Allora $\exists\ x_0, x_1$ t.c.:

$f(x) \le f(x_0)$  $f(x) \ge f(x_1)$

$x_0$ punto MAX  $x_1$ punto MIN.

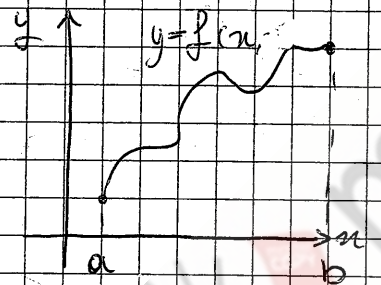
# ALCUNE PARAMETRIZZAZIONI STANDARD

## Segmento tra 2 punti:

$P_1 = (a_1, b_1)$
$P_2 = (a_2, b_2)$

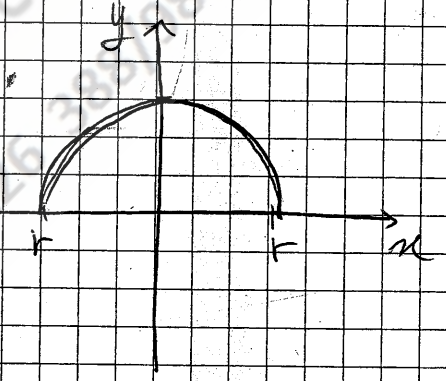
$$t \longrightarrow t(a_1, b_1) + (1-t)(a_2, b_2)$$

## Grafico di funzioni

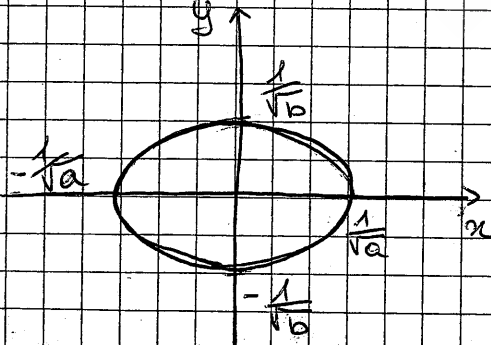



$$[a,b] \ni t \longrightarrow (t, y(t))$$

$$[r,r] \ni t \longrightarrow (t, \sqrt{1-t^2})$$




## Ellisse:




$$ax^2 + by^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{a}}$$
$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{b}}$$

$$[0, 2\pi] \ni \theta \longrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\cos\theta, \frac{1}{\sqrt{b}}\sin\theta\right)$$

master COPY COPISTERIA

# MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE (MAX, MIN)

**1° PASSO** Calcolo $\nabla f$ e $\nabla \Phi$

**2° PASSO** Compongo il sistema

$$\begin{cases} \partial_x f = \lambda \partial_x \Phi \\ \partial_y f = \lambda \partial_y \Phi \\ \Phi(x,y) = 0 \end{cases} \quad \mathbb{R}^2$$

**3° PASSO** Trovo i valori di $x$ ed $y$ da sostituire in $f(x,y)$.

**Caso $\mathbb{R}^3$**

$$\begin{cases} \partial_x f = \lambda \partial_x \Phi \\ \partial_y f = \lambda \partial_y \Phi \\ \partial_z f = \lambda \partial_z \Phi \\ \Phi(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

**Caso più vincoli:** $\Phi_1$, $\Phi_2$

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla \Phi_1 + \mu \nabla \Phi_2 \\ \Phi_1 = 0 \\ \Phi_2 = 0 \end{cases}$$

## CASO funzioni con VALORE ASSOLUTO

Inizio a considerare il problema come se non ci fosse il modulo.

In seguito uso la tabella seguente:

- $MAX_A f$, $MIN_A f$ sono $\geq 0$ $\Rightarrow$ $MAX f = MAX |f|$
  $MIN f = MIN |f|$

- $MAX_A f$, $MIN_A f$ sono $\leq 0$ $\Rightarrow$ $MAX |f| = |MIN f|$
  $MIN |f| = |MAX f|$

- $MAX_A f > 0$ e $MIN_A f < 0$ $\Rightarrow$ $MIN |f| = 0$
  $MAX |f| = Max \{ MAX f, |MIN f| \}$
  Il max fra i due

master CORSI COSENZA